第3講座 方程式

P. 26

1 <解答例>

- (1) $x = -3$ (2) $x = -2$ (3) $x = 5$
 (4) $x = 6$ (5) $x = 3$ (6) $x = -5$
 (7) $x = -2$ (8) $x = 3$ (9) $x = -6$
 (10) $x = -2$

<考え方・解き方>

- (1) $6x + 4 = 3x - 5$ (2) $x - 1 = 3x + 3$
 $6x - 3x = -5 - 4$ $x - 3x = 3 + 1$
 $3x = -9$ $-2x = 4$
 $x = -3$ $x = -2$
- (3) $1.3x - 2 = 0.7x + 1$ (4) $5x = 3(x + 4)$
 $13x - 20 = 7x + 10$ $5x = 3x + 12$
 $13x - 7x = 10 + 20$ $5x - 3x = 12$
 $6x = 30$ $2x = 12$
 $x = 5$ $x = 6$
- (5) $\frac{2x+9}{5} = x$ (6) $x - 4 = 5x + 16$
 $2x + 9 = 5x$ $x - 5x = 16 + 4$
 $2x - 5x = -9$ $-4x = 20$
 $-3x = -9$ $x = -5$
 $x = 3$
- (7) $2x + 7 = 1 - x$ (8) $3x - 7 = 8 - 2x$
 $2x + x = 1 - 7$ $3x + 2x = 8 + 7$
 $3x = -6$ $5x = 15$
 $x = -2$ $x = 3$
- (9) $5x + 8 = 3x - 4$ (10) $5x + 18 = 6 - x$
 $5x - 3x = -4 - 8$ $5x + x = 6 - 18$
 $2x = -12$ $6x = -12$
 $x = -6$ $x = -2$

P. 26

2 <解答例>

- (1) $(x, y) = (\frac{1}{2}, -1)$ (2) $(x, y) = (7, 3)$
 (3) $(x, y) = (2, -1)$ (4) $(x, y) = (1, 3)$
 (5) $(x, y) = (1, -\frac{1}{3})$ (6) $(x, y) = (-1, 2)$
 (7) $(x, y) = (3, -2)$ (8) $(x, y) = (-1, 3)$
 (9) $(x, y) = (5, -1)$ (10) $(x, y) = (8, -2)$

<考え方・解き方>

- (1) $\begin{cases} 4x + y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ 2x - 3y = 4 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x + 2y = 27 \cdots \textcircled{1} \\ 5x - 4y = 23 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 ①より, ①×2+②より,
 $y = 1 - 4x \cdots \textcircled{1}'$ $11x = 77$
 これを②に代入して, $x = 7$
 $2x - 3(1 - 4x) = 4$ これを①に代入して,
 $2x - 3 + 12x = 4$ $21 + 2y = 27$
 $14x = 7$ $2y = 6$
 $x = \frac{1}{2}$ $y = 3$
 これを①に代入して,

$$y = 1 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= -1$$

- (3) $\begin{cases} 2x - y = 5 \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 3x + y = 6 \cdots \textcircled{1} \\ -x + 3y = 8 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 ①より, ②より,
 $y = 2x - 5 \cdots \textcircled{1}'$ $x = 3y - 8 \cdots \textcircled{2}'$
 これを②に代入して, これを①に代入して,
 $3x + 4(2x - 5) = 2$ $3(3y - 8) + y = 6$
 $3x + 8x - 20 = 2$ $9y - 24 + y = 6$
 $11x = 22$ $10y = 30$
 $x = 2$ $y = 3$
 これを①'に代入して, これを②'に代入して,
 $y = 4 - 5$ $x = 9 - 8$
 $y = -1$ $= 1$
- (5) $\begin{cases} 2x - 9y = 5 \cdots \textcircled{1} \\ -x + 3y = -2 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x + 2y = 3 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - y = -5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 ①+②×3より, ①+②×2より,
 $-x = -1$ $7x = -7$
 $x = 1$ $x = -1$
 $x = 1$ を①に代入して, $x = -1$ を①に代入して,
 $2 \times 1 - 9y = 5$ $-1 + 2y = 3$
 $-9y = 3$ $2y = 4$
 $y = -\frac{1}{3}$ $y = 2$
- (7) $\begin{cases} x - 4y = 11 \cdots \textcircled{1} \\ 5x + 3y = 9 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ (8) $\begin{cases} y = 6x + 9 \cdots \textcircled{1} \\ 4x + 3y = 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 ①より, ①を②に代入して,
 $x = 11 + 4y \cdots \textcircled{1}'$ $4x + 3(6x + 9) = 5$
 ①'を②に代入して, $4x + 18x + 27 = 5$
 $5(11 + 4y) + 3y = 9$ $22x = -22$
 $55 + 20y + 3y = 9$ $x = -1$
 $23y = -46$ これを①に代入して,
 $y = -2$ $y = 6 \times (-1) + 9$
 $y = -2$ を①'に代入して, $= 3$
 $x = 11 + 4 \times (-2)$
 $= 11 - 8$
 $= 3$
- (9) $\begin{cases} x - 3y = 8 \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 9y = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ (10) $\begin{cases} 0.2x + 0.3y = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x - 14 = 3y \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 ①×2-②より, ②より,
 $-15y = 15$ $x - 3y = 14 \cdots \textcircled{2}'$
 $y = -1$ ①×10+②'より,
 ①に代入して, $3x = 24$
 $x + 3 = 8$ $x = 8$
 $x = 5$ これを②に代入して,
 $8 - 14 = 3y$
 $3y = -6$
 $y = -2$

P. 27

3 <解答例>

- (1) $x = 4, 8$ (2) $x = 0, -4$
 (3) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (4) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$

$$(5) x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$(7) x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$(9) x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

<考え方・解き方>

$$(1) (x-6)^2 = 4$$

$$x-6 = \pm 2$$

$$x = 6 \pm 2$$

$$x = 4, 8$$

(3) 式を整理すると、

$$x^2 - x - 1 = 0$$

解の公式を使って、

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(4) 3x^2 + 6x = x - 1$$

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$(6) x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(7) (x+3)(x-3) = x$$

$$x^2 - 9 = x$$

$$x^2 - x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-9)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+36}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

$$(8) 2x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$(9) 2x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$(6) x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(8) x = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$(10) x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$$(2) x^2 = -4x$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0, -4$$

$$(5) x^2 + 7x = 2x - 1$$

$$x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$(10) 4x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49-32}}{8}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{8}$$

P. 28

4 <解答例>

$$(1) \text{ア } 3 \text{ イ } 36 \quad (2) \text{ア } 2 \text{ イ } 5 \text{ ウ } -2 \text{ エ } 3$$

$$(3) a = 16, x = -5 \quad (4) \text{イ, ウ}$$

(5) 次のいずれかとなる。

$$\text{ア} = 9 \quad \text{イ} = 2 \quad \text{ウ} = 7 \quad \text{ア} = 7 \quad \text{イ} = 5 \quad \text{ウ} = 2$$

$$(6) \text{ア } 14 \quad \text{イ } -2 \quad (7) 4a + 3b < 1700$$

$$(8) \text{① } a = 10 \quad \text{② } -3$$

$$(9) \text{ア } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\frac{c}{a}$ を右辺に移項し、両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加えると、

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<考え方・解き方>

$$(1) x^2 + 6x + \square \text{の} \square \text{にどんな数があれば} x^2 + 6x + \square$$

$= (x + \triangle)^2$ の因数分解ができるかを考える。具体的

には x の係数がどんな数でも x の係数の半分を2

乗した数があることになる。つまり、6の半分で

3、3の2乗で9があれば $x^2 + 6x + \square = (x + \triangle)^2$

と因数分解できる。よって $(\square) = 9$ であるから、

$\text{ア} = 3$ となる。 $\text{ア} = 3$ が見つけられれば、後は計算

の流れに従って計算していく。

$$(2) \text{ア} = a, \text{イ} = b \text{ とすると、}$$

$$ax + by = 11 \cdots \text{①}$$

①の解が、 $x = 3, y = 1$ であればよいから、①に代入すると、

$$3a + b = 11 \cdots \text{②}$$

②の a, b に1以外の自然数をあてはめて、順にみつ

$$\begin{array}{c|ccc} a & 2 & 3 & \cancel{4} \cdots \\ b & 5 & 2 & \cancel{1} \cdots \end{array}$$

の2組しかない。よって、 $(\text{ア}, \text{イ}) = (2, 5), (3, 2)$

のいずれかを答える。

$\text{ア} = 2, \text{イ} = 5$ のとき、

$$2x + 5y = 11$$

となるから、次の場合などが考えられる。

$$\begin{array}{c|cccc} x & \cdots & -2 & 3 & 8 \cdots \\ y & \cdots & 3 & 1 & -1 \cdots \end{array}$$

$\text{ア} = 3, \text{イ} = 2$ のとき、

$$3x+2y=11$$

となるから、次の場合などが考えられる。

x	...	-3	1	5	...
y	...	10	4	-2	...

(3) $x=3$ を式に代入すると、

$$(3+1)^2=a$$

$$4^2=a \quad a=16$$

よって、もとの方程式は、

$$(x+1)^2=16$$

$$x+1=\pm 4$$

$$x=-1\pm 4$$

他の解 $x=-5$

(4) ア $x^2-5x-6=0$ イ $(x-2)^2=1$

$$(x+1)(x-6)=0 \quad x-2=\pm 1$$

$$x=-1, 6 \quad x=2\pm 1$$

$$x=1, 3$$

ウ $x(x-1)=4(x-1)$ エ $(x+1)(x-1)=3$

$$x^2-x=4x-4 \quad x^2-1=3$$

$$x^2-5x+4=0 \quad x^2=4$$

$$(x-1)(x-4)=0 \quad x=\pm 2$$

$$x=1, 4$$

(5) $\boxed{イ}$ と $\boxed{ウ}$ を使って等式をつくると、

$$5\times\boxed{イ}+3\times\boxed{ウ}=31$$

この関係を満たす、 $\boxed{イ}$ 、 $\boxed{ウ}$ を表にすると、

$\boxed{イ}$	2	5
$\boxed{ウ}$	7	2

となる。よって、 $\boxed{イ}+\boxed{ウ}=\boxed{ア}$ だから、

$$(\boxed{ア}, \boxed{イ}, \boxed{ウ})=(9, 2, 7), (7, 5, 2)$$

(6) $a=7$ を a^2-5a に代入すると、

$$a^2-5a=7^2-5\times 7$$

$$=49-35$$

$$=14$$

また、 $a^2-5a=14$ を解くと、

$$a^2-5a-14=0$$

$$(a-7)(a+2)=0$$

よって、 $a=7, -2$

(7) 代金の合計<1700だから、

$$a\times 4+b\times 3<1700$$

$$4a+3b<1700$$

(8) ① $x=4$ を式に代入して、

$$(4+1)\times(4-2)=a$$

$$a=10$$

② $a=10$ だから、

$$(x+1)(x-2)=10$$

$$x^2-x-12=0$$

$$(x-4)(x+3)=0$$

$$x=4, -3$$

よって、もう一つの解は $x=-3$

(9) イ $\frac{c}{a}$ を移項して、

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$\frac{b}{a}$ の半分の2乗を両辺にたして

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

左辺を平方の形にして、

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

よって、

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

P. 30

5 <解答例>

(1) 左の皿に3個のせた。

(2)

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \text{連立方程式} \begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{y}{4}=\frac{10}{12}+\frac{10}{60} \end{cases} \end{cases}$$

走った道のり9km, 歩いた道のり1km

(3) 11ページ

(4) 方程式 $(x+3)^2-21=10x$

x の値 $-2, 6$

(5) 方程式 $x+x^2=3$, x の値 $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

(6) ①1340 ② $x=27, y=12$

<考え方・解き方>

(1) ●を $x(g)$, ◎を $y(g)$ とすると○は1gだから、

1 図より、

$$2x=y+1\cdots\text{①}$$

2 図より、

$$3x+1=2y\cdots\text{②}$$

①, ②より、

$$x=3(g), y=5(g)$$

よって、3 図で、

$$\text{左の皿}=4x=4\times 3=12(g)$$

$$\text{右の皿}=3y=3\times 5=15(g)$$

よって、左の皿に○(1g)を3個のせればよい。

(2) 走った道のりを x km, 歩いた道のりを y kmとおく。

	走った	歩いた	合計
道のり	x km	y km	10km
速さ	時速12km	時速4km	*
時間	$\frac{x}{12}$ 時間	$\frac{y}{4}$ 時間	$\frac{10}{12}+\frac{10}{60}$ 時間

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{x}{12}+\frac{y}{4}=\frac{10}{12}+\frac{10}{60} \end{cases}$$

この連立方程式を解いて、 $(x, y)=(9, 1)$

(3) 月曜日に x ページ読んだとすると、次の表より、最も多く読んだのは木曜日の $x+5$ ページだから、土曜日は $2(x+5)$ ページとなる。

曜日	月	火	水	木	金	土
前日との差		-2	+4	+3	-1	
読んだページ	x	$x-2$	$x+2$	$x+5$	$x+4$	$2(x+5)$

6日間の読んだページの平均が16ページだから、
 $x + (x-2) + (x+2) + (x+5) + (x+4) + 2(x+5) = 16 \times 6$

これを解いて、 $x=11$

(4)図の操作にしたがって式をつくると、

$$(x+3)^2 - 21 = x \times 10$$

整理して解くと、

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$x = -2, 6$$

(5) x と x^2 の和が3になるので、 $x+x^2=3$ という式がで
 きる。これを解くと、

$$x+x^2=3$$

$$x^2+x-3=0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(6)① $2019-9=2010$ (イ)

$$2010 \times \frac{2}{3} = 1340$$
(ウ)

よって、1340

②問題より、

$$\begin{cases} (x-9) \times \frac{2}{3} = y \\ (y-9) \times \frac{2}{3} = 2 \end{cases}$$

これを解いて、

$$x=27, y=12$$

P. 32

6 <解答例>

(1) ① $15-x-y$ (回) ② $x-3y+15$ (点)

(2) 花子 6回 太郎 4回

<考え方・解き方>

	勝(2点)	負(-2点)	あいこ(1点)
花子	x 回	y 回	$15-x-y$ 回
太郎	y 回	x 回	$15-y-x$ 回

(1)①15回じゃんけんをしているので、あいこの回数は
 上の表のようになる。

②表より、

$$\begin{aligned} & x \times 2 + y \times (-2) + (15-x-y) \times 1 \\ &= 2x - 2y + 15 - x - y \\ &= x - 3y + 15 \text{ (点)} \end{aligned}$$

(2)花子の得点が9点だから、(1)の②より、

$$x - 3y + 15 = 9 \cdots (\text{ア})$$

太郎が1点だから、

$$\begin{aligned} & y \times 2 + x \times (-2) + (15-y-x) \times 1 = 1 \\ & 2y - 2x + 15 - y - x = 1 \\ & -3x + y + 15 = 1 \cdots (\text{イ}) \end{aligned}$$

(ア)、(イ)より、

$$x=6, y=4$$

P. 33

7 <解答例>

(1) 128cm^3 (2) ① ア $4x$ イ $\frac{1}{2}x^2 - 16x + 128$

ウ 68 エ 256 ② 88cm^3

<考え方・解き方>

(1)底面は1辺が4cmの正方形になる。

$$4 \times 4 \times 8 = 128 (\text{cm}^3)$$

(2)① $V = 2^2 \times x = 4x \rightarrow \text{ア}$

$$V = \left(4 - \frac{x}{4}\right)^2 \times 8 = 8 \left(\frac{x^2}{16} - 2x + 16\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 16x + 128 \rightarrow \text{イ}$$

よって、

$$V : V' = 4x : \left(\frac{1}{2}x^2 - 16x + 128\right) = 2 : 9$$

$$4x \times 9 = 2 \times \left(\frac{1}{2}x^2 - 16x + 128\right)$$

$$36x = x^2 - 32x + 256$$

$$x^2 - 68x + 256 = 0$$

② $x^2 - 68x + 256 = 0$

$$(x-4)(x-64) = 0$$

$$x=4, 64 \quad 0 < x < 8 \text{ より, } x=4$$

よって、

$$\begin{aligned} V + V' &= 4 \times 4 + 9 \times 8 \\ &= 88 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$