第６講座　空間図形

P. 75

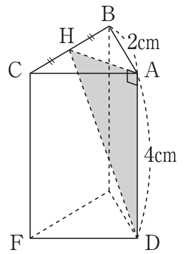
1＜解答例＞

(1)　$\sqrt{19}$ cm　(2)　144π cm^3　(3)　$a=\dfrac{5}{3}$

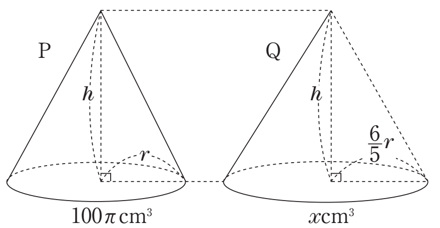
(4)　24π cm^3

＜考え方・解き方＞

(1)△ABC は正三角形だから AH＝$\sqrt{3}$ なので，△AHD について，三平方の定理を用いて，$4^2+(\sqrt{3})^2=\mathrm{HD}^2$となる。よって，HD＝$\sqrt{19}$cm となる。



(2)



上図のように，もとの円錐 P の高さを h，底面の半径を r とすると，底面の半径を20％だけ長くした円錐 Q の底面の半径は，$r\times\left(1+\dfrac{20}{100}\right)=\dfrac{6}{5}r$ と表せる。よって，

P の体積：Q の体積

$=\dfrac{1}{3}\times\pi r^2\times h:\dfrac{1}{3}\times\dfrac{36}{25}\pi r^2\times h$

$=1:\dfrac{36}{25}$

$=25:36$

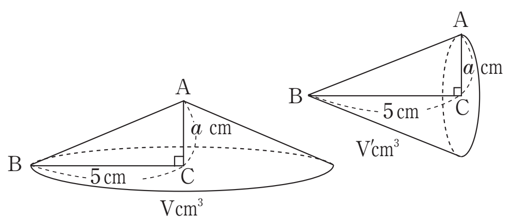
よって，

P の体積：Q の体積＝25：36

$100\pi:x=25:36$

$x=144\pi$ (cm^3)

(3) AC を軸として，１回転させてできる円錐の体積を V，BC を軸として１回転させてできる円錐の体積を V′ とすると，



$\mathrm{V}=\dfrac{1}{3}\times25\pi\times a$　　$\mathrm{V}'=\dfrac{1}{3}\times\pi a^2\times5$

$=\dfrac{25\pi a}{3}\cdots①$　　$=\dfrac{5\pi a^2}{3}\cdots②$

①＝②×3なので，

$\dfrac{25\pi a}{3}=\dfrac{5\pi a^2}{3}\times3$

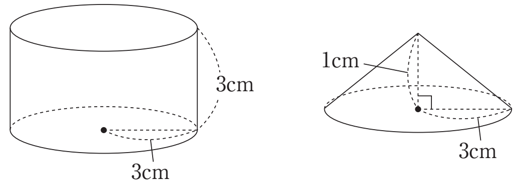
$5a=3a^2$

$3a^2-5a=0$

$a(3a-5)=0$

$a=0,\ \dfrac{5}{3}$　$a>0$なので，$a=\dfrac{5}{3}$

(4) 辺 AB を軸として１回転させてできる立体は，下の円柱から円錐をひいて求める。



円柱の体積＝$9\pi\times3=27\pi$

円錐の体積＝$\dfrac{1}{3}\times9\pi\times1=3\pi$

よって，$27\pi-3\pi=24\pi$ (cm^3)

P. 76

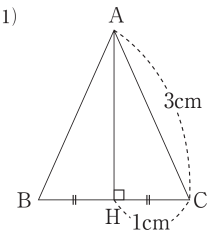
2＜解答例＞

(1)　$2\sqrt{2}$ cm　　(2)　$\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$ cm

(3)　$\dfrac{32\sqrt{2}}{11}$ cm^3

＜考え方・解き方＞

(1)



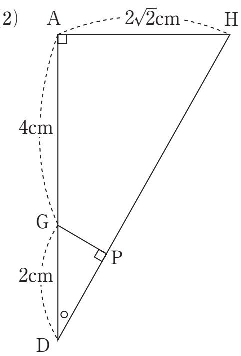
△ABC は二等辺三角形なので，∠AHC＝90° になるから，三平方の定理より，

$\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2=\mathrm{AC}^2$

$\mathrm{AH}^2+1^2=3^2$

よって，AH＝$2\sqrt{2}$ (cm)

(2)



(1)の結果を用いて，△ADH で三平方の定理より，

$\mathrm{AH}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{HD}^2$

$(2\sqrt{2})^2+6^2=\mathrm{HD}^2$

よって，HD＝$2\sqrt{11}$

ここで，

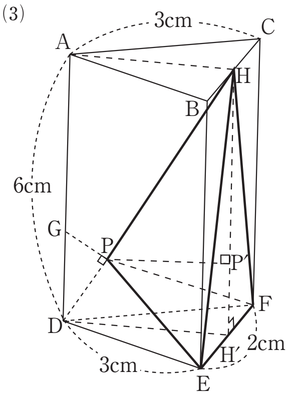
△ADH∽△PDG より，

DH：DG＝AD：PD

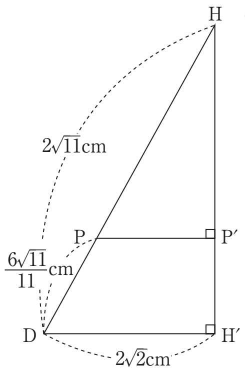
$2\sqrt{11}:2=6:\mathrm{PD}$

$\mathrm{PD}=\dfrac{6\sqrt{11}}{11}$ (cm)

(3)



三角錐の PEFH は左図の太線の図形になり，底面を△HEFにすると，高さは PP′ となる。



$\triangle$HDH′ で,

$$\text{HD}:\text{PD}=2\sqrt{11}:\frac{6\sqrt{11}}{11}$$
$$=11:3$$

よって,

$$\text{HD}:\text{HP}=11:(11-3)$$
$$=11:8$$

ここで, $\triangle$HPP′ ∽ $\triangle$HDH′ より,

$$\text{PP}':\text{DH}'=\text{HP}:\text{HD}$$
$$\text{PP}':2\sqrt{2}=8:11$$
$$\text{PP}'=\frac{16\sqrt{2}}{11}$$

よって,

$$\text{P}-\text{EFH}=\frac{1}{3}\times\triangle\text{HEF}\times\text{PP}'$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times6\right)\times\frac{16\sqrt{2}}{11}$$
$$=\frac{32\sqrt{2}}{11}(\text{cm}^3)$$

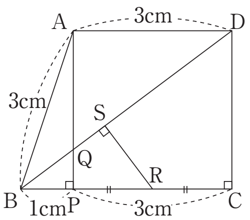
P. 76

3 <解答例>

(1) $2\sqrt{2}$ cm　(2) $\frac{21\sqrt{6}}{2}$ cm^2

(3) $\frac{35\sqrt{2}}{4}$ cm^3

<考え方・解き方>



(1) PC = AD = 3 なので,

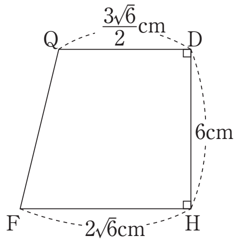
BP = 1 だから,

$\triangle$ABP で,

$$\text{AP}^2+\text{BP}^2=\text{AB}^2$$
$$\text{AP}^2+1^2=3^2$$

よって,

$$\text{AP}=2\sqrt{2}\ (\text{cm})$$



(2) $\triangle$DBC で, DC = AP = $2\sqrt{2}$

だから,

$$\text{BC}^2+\text{DC}^2=\text{BD}^2$$
$$4^2+(2\sqrt{2})^2=\text{BD}^2$$
$$\text{BD}=2\sqrt{6}$$

$\triangle$QBP ∽ $\triangle$QDA より,

$$\text{BQ}:\text{DQ}=\text{BP}:\text{DA}=1:3$$

よって,

$$\text{QD}=\frac{3}{4}\text{BD}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

FH = BD = $2\sqrt{6}$ だから,

$$\text{QFHD}=(\text{QD}+\text{FH})\times\text{DH}\times\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{6}\right)\times6\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{21\sqrt{6}}{2}(\text{cm}^2)$$

(3) 求める四角錐 RQFHD の高さは RS になる。

BR = $\frac{5}{2}$ だから, $\triangle$DBC ∽ $\triangle$RBS より,

$$\text{DB}:\text{RB}=\text{DC}:\text{RS}$$
$$2\sqrt{6}:\frac{5}{2}=2\sqrt{2}:\text{RS}$$
$$\text{RS}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

(2)より, 底面積 QFHD = $\frac{21\sqrt{6}}{2}$ だから,

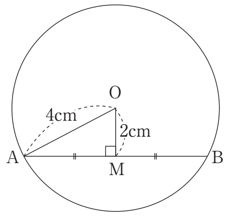
$$\text{RQFHD}=\frac{1}{3}\times\frac{21\sqrt{6}}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{6}$$
$$=\frac{35\sqrt{2}}{4}(\text{cm}^3)$$

P. 77

4 <解答例>

(1) 96π cm^3　(2) $4\sqrt{3}$ cm　(3) $4\sqrt{30}$ cm^2

<考え方・解き方>



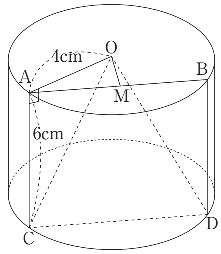
(2) $\triangle$OAM で, $\angle$OMA = 90°,

OA : OM = 2 : 1 だから,

$$\text{AM}=2\sqrt{3}$$

よって,

$$\text{AB}=2\text{AM}$$
$$=4\sqrt{3}(\text{cm})$$



(3) $\triangle$OAC で,

$$4^2+6^2=\text{OC}^2$$
$$\text{OC}=2\sqrt{13}$$

また, (2)より,

$$\text{CD}=\text{AB}=4\sqrt{3}$$

よって, CH = DH だから,

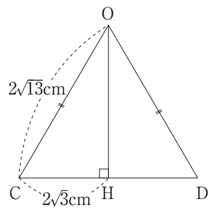
$$\text{CH}=2\sqrt{3}$$

$\triangle$OCH で,

$$(2\sqrt{3})^2+\text{OH}^2=(2\sqrt{13})^2$$
$$\text{OH}=2\sqrt{10}$$

よって,

$$\triangle\text{OCD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{10}$$
$$=4\sqrt{30}\ (\text{cm}^2)$$

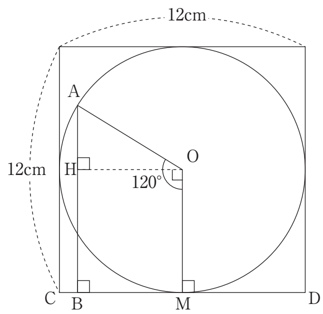


P. 77

5 <解答例>

(1) 9cm　(2) ① $27\sqrt{3}$ cm^3　② $\frac{9}{4}$ cm

<考え方・解き方>



(1) 立体を球の中心O と底面の直径CDを通る平面で切ると, 右のような断面図になる。

$\triangle$OAHで

$\angle$AOH = 30°,

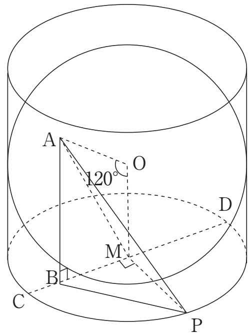
OA = OM = 6 なので,

$$\text{AH}=3$$

HB = OM = 6 なので,

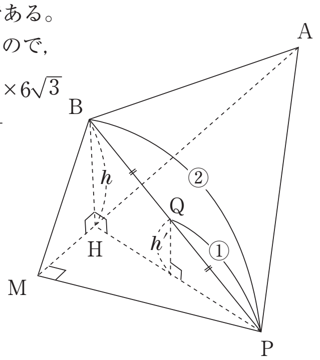
$AB = 3 + 6$
$\quad = 9\,(\text{cm})$

(2)①P－ABMの体積が最大になるのは，右図のように∠BMP＝90°のときで，(1)より，
$AB = 9$，$BM = 3\sqrt{3}$，
$PM = 6$だから，



$$P - ABM = \frac{1}{3} \times \triangle ABM \times PM$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 9\right) \times 6$$
$$= 27\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$$

②面ABMOと線分PMは垂直なので△AMP は∠AMP＝90°の直角三角形である。
$AM = 6\sqrt{3}$，$PM = 6$なので，
$$\triangle AMP = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3}$$
$$= 18\sqrt{3}$$



右図で
∠BMP＝90°だから，
△BMA⊥PMなので，
点HはAM上にくる。
$BH = h$とすると，
$\triangle ABM = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}$より，
$$\frac{1}{2} \times AM \times h = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times h = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \frac{9}{2}$$
PQ：PB＝1：2なので，
$$h : h' = 2 : 1$$
$$\frac{9}{2} : h' = 2 : 1$$
$$h' = \frac{9}{4}$$
よって，点Qから平面AMPに下した垂線の長さは$\dfrac{9}{4}$cmである。

P. 78

6 ＜解答例＞

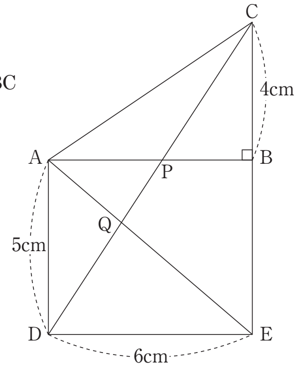
(1)　$2\sqrt{13}$ cm　　(2)　$\dfrac{8}{3}$ cm

(3)　AQ：QE＝ 5 ：9　　(4)　$\dfrac{100}{7}$ cm³

＜考え方・解き方＞

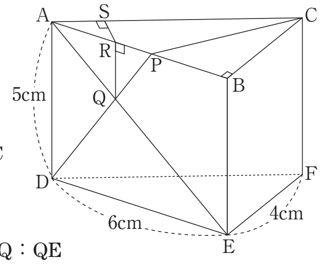
(1)△ABC で，
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$
$$6^2 + 4^2 = AC^2$$
$$AC = 2\sqrt{13}\,(\text{cm})$$

(2)△PAD∽△PBC より，
$$PA : PB = AD : BC$$
$$= 5 : 4$$
AB＝DE＝6cm だから，
$$PB = 6 \times \frac{4}{9}$$
$$= \frac{8}{3}\,(\text{cm})$$

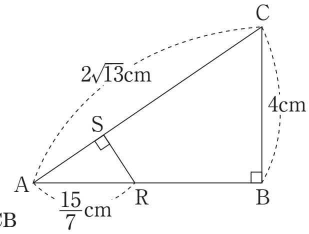


(3) △QAD∽△QEC より，
AQ：QE＝AD：EC
＝5：9

(4)点QからABに垂線QRを引き，点RからACに垂線RS を引くと，この RSが，四角錐 QADFCの高さになる。



QR∥EB より，
$$AR : RB = AQ : QE$$
$$= 5 : 9$$
AB＝6cm だから，
$$AR = 6 \times \frac{5}{14}$$
$$= \frac{15}{7}$$



△ARS∽△ACB より，
$$AR : AC = RS : CB$$
$$\frac{15}{7} : 2\sqrt{13} = RS : 4$$
$$RS = \frac{30}{7\sqrt{13}}$$
よって，
$$QADFC = \frac{1}{3} \times (5 \times 2\sqrt{13}) \times \frac{30}{7\sqrt{13}}$$
$$= \frac{100}{7}\,(\text{cm}^3)$$

P. 79

7 ＜解答例＞

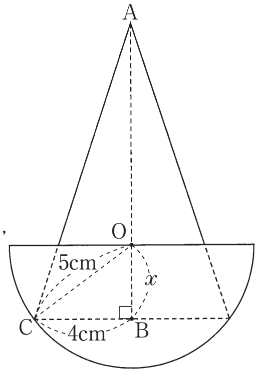
(1)　64π cm³　　(2)　12cm　　(3)　①3cm
②$37\pi$ cm³

＜考え方・解き方＞

(2)円柱と円錐の体積が等しいから，(1)より，
$$\frac{1}{3} \times 16\pi \times AB = 64\pi$$
$$AB = 12\,(\text{cm})$$

(3)①△OBC で，
$$OC^2 = BC^2 + BO^2$$
$$5^2 = 4^2 + x^2$$
$$x = \pm 3$$
よって，OB＝3(cm)

②円錐全体を V_1とすると，
V_1と V_2は相似で，
相似比は，
$$V_1 : V_2 = 12 : 9$$



$=4:3$

よって，体積比は，

$V_1:V_2=4^3:3^3$
$=64:27$

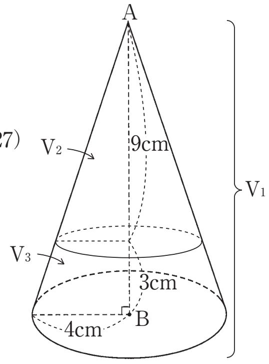
よって，

$V_1:V_3=64:(64-27)$
$=64:37$

$V_3=\dfrac{37}{64}V_1$

V_1の体積は64πだから，

$V_3=\dfrac{37}{64}\times64\pi$
$=37\pi\ (\mathrm{cm}^3)$



P. 80

8<解答例>

(1) 12cm　(2) $288\pi\ \mathrm{cm}^3$　(3) $8+4\sqrt{3}$cm

(4) $96\mathrm{cm}^3$

<考え方・解き方>

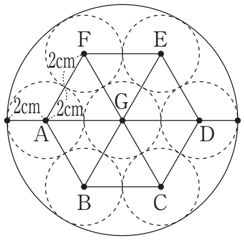
(1)**図 4** より，

$2\times6=12(\mathrm{cm})$

(2)(1)より，球の半径は6だから，

$\dfrac{4}{3}\pi\times6^3=288\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

図 4



(3)**図 5** で，PO$=8$，PQ$=4$ だから，

△POQ で，

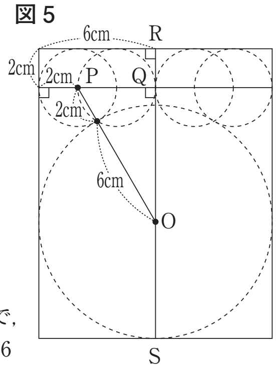
$QO^2+4^2=8^2$
$QO=4\sqrt{3}$

RQ$=2$，OS$=6$ だから，

円柱の高さ

$RS=2+4\sqrt{3}+6$
$=8+4\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

図 5



(4)正六角錐の底面は**図 4** の正六角形 ABCDEF なので，

$ABCDEF=\triangle AGF\times6$
$=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times6$
$=24\sqrt{3}$

高さは**図 5** の $QO=4\sqrt{3}$ なので，

$O-ABCDEF=\dfrac{1}{3}\times24\sqrt{3}\times4\sqrt{3}$
$=96(\mathrm{cm}^3)$

P. 81

9<解答例>

(1) 辺 CF，辺 DF，辺 EF，

(2) ア $9^2-(8-x)^2$　イ 2

(3) $60\pi\ \mathrm{cm}^3$

<考え方・解き方>

(2)**図 1** で，△DPF で，三平方の定理より，

$DP^2=9^2-(8-x)^2$…ア

となる。これより，

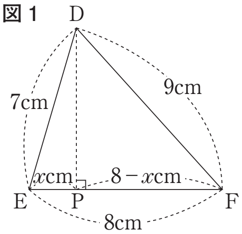
$7^2-x^2=9^2-(8-x)^2$

という方程式ができる。これを解くと，

$x=2$…イ

が求められる。

図 1



(3)(2)より

$DP^2=9^2-(8-2)^2$
$=45$

$DP=\pm3\sqrt{5}$

DP>0なので，DP$=3\sqrt{5}$である。また，

△ADP で，

$AP^2=6^2+(3\sqrt{5})^2$
$=81$

$AP=\pm9$

AP>0なので，AP$=9$である。

図 2

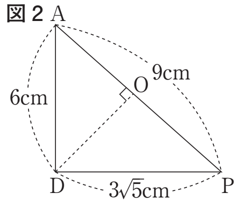


図 2 で，点 D から辺 AP に垂線を引き，垂線と辺 AP との交点を O とする。

△ADP で，

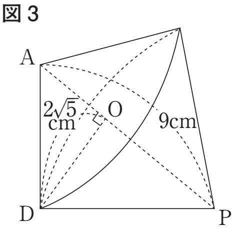
$9\times DO\times\dfrac{1}{2}=6\times3\sqrt{5}\times\dfrac{1}{2}$

$DO=2\sqrt{5}$

△ADP を辺 AP を軸として 1 回転させると，**図 3** のような立体ができる。

この立体の体積は，

図 3



$2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\times\pi\times9\times\dfrac{1}{3}=60\pi\ (\mathrm{cm}^3)$

P. 82

10<解答例>

(1) ①4cm　②$\dfrac{32}{3}\mathrm{cm}^3$

(2) ①$\dfrac{3}{2}$cm　②$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$cm

<考え方・解き方>

(1)① AP$=2$より，OP$=6-2=4$

よって，

OA：OP$=6:4=3:2$

OB：OD$=3:2$

∠AOB＝∠POD(共通な角)

より，△OAB ∽△OPD である。

よって，AB：PD$=3:2$より，

$PD=6\times\dfrac{2}{3}=4\ (\mathrm{cm})$

②(1)①より，

OA：OP＝OC：OE$=3:2$

∠AOC＝∠POE(共通な角)

より，△OAC ∽△OPE である。

よって，

$PE=6\times\dfrac{2}{3}=4$

三角錐 OPDE は底面を△PDE としたとき，高さ OP となるので，

$$\frac{1}{3}\times\left(4\times4\times\frac{1}{2}\right)\times4=\frac{32}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

(2)① $\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{OP}=6-x$ とおく。

△OPD は底辺を OP としたとき，高さが4cm になるので，その面積を x を使って表すと，

$$(6-x)\times4\times\frac{1}{2}=12-2x$$

三角錐 OPDE は底面を△OPD としたとき，高さは4cm となるので，その体積を x を使って表すと，

$$\frac{1}{3}\times(12-2x)\times4=16-\frac{8}{3}x$$

三角錐 OABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\times\left(6\times6\times\frac{1}{2}\right)\times6=36$$

三角錐 OPDE の体積が三角錐 OABC の体積の $\frac{1}{3}$になればよいので，

$$16-\frac{8}{3}x=36\times\frac{1}{3}$$

これを解いて，

$$x=\frac{3}{2}\ (\mathrm{cm})$$

②△OAB≡△OAC≡△ABCより，BC＝OC＝OB なので，△OBC は正三角形で，△OBC ∽△ODE なので，△ODE も正三角形である。

(1)①より，OB：OD＝3：2で，△OAB は直角二等辺三角形なので，

$$\mathrm{OD}=6\sqrt{2}\times\frac{2}{3}=4\sqrt{2}$$

DE の中点を M とする。△ODM は$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形なので，

$$\mathrm{OM}=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$$

よって，△ODE の面積は，

$$4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\times\frac{1}{2}=8\sqrt{3}$$

求める長さを h とおく。この h は三角錐 OPDE で，△ODE を底面としたときの高さである。

よって，(2)①より，

$$\frac{1}{3}\times8\sqrt{3}\times h=36\times\frac{1}{3}$$

これを解いて，

$$h=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\mathrm{cm})$$

P. 83

11＜解答例＞

(1)　$4\sqrt{2}$cm　　(2)　4cm

(3)　①$12\pi\mathrm{cm}^2$　　②$2\sqrt{19}$cm

＜考え方・解き方＞

(1)**図２**で，△ ABM より，

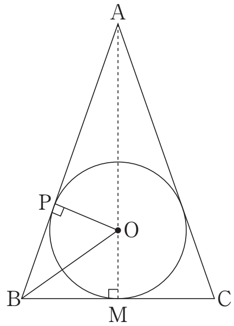
$$\mathrm{AM}^2=6^2-2^2$$
$$=32$$

$$\mathrm{AM}=\pm4\sqrt{2}$$

AM＞０なので，$\mathrm{AM}=4\sqrt{2}$(cm)

(2)**図２**で球の中心を O とする。

図２



△BMO と△BPO で，

MO＝PO

∠BMO＝∠BPO＝90°

BO は共通

直角三角形の斜辺と他の１辺がそれぞれ等しいので，△BMO ≡△BPO である。よって，

BP＝BM＝2

したがって，

AP＝6−2＝4(cm)

(3)①おうぎ形の中心角を a とおく。おうぎ形の弧の長さと底面の円の円周の長さは等しいので，

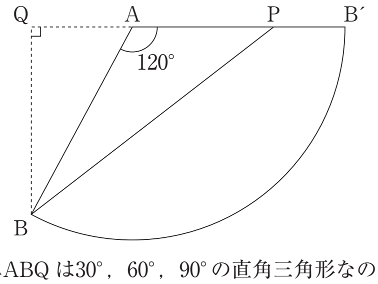
$$2\times6\times\pi\times\frac{a}{360}=2\times2\times\pi$$

これを解いて，$a=120$

したがって，おうぎ形の面積は，

$$6\times6\times\pi\times\frac{120}{360}=12\pi\ (\mathrm{cm}^2)$$

② BP が最短になるには，BP が直線であればよいので，下図のようになる。また，線分 AB′の延長線上に，AB′⊥BQ となる点 Q をとる。



△ABQ は30°，60°，90°の直角三角形なので，

$$\mathrm{BQ}=6\times\frac{2}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

$$\mathrm{AQ}=6\times\frac{1}{2}=3$$

△PBQ より，

$$\mathrm{PB}^2=7^2+(3\sqrt{3})^2$$
$$=76$$

$$\mathrm{PB}=\pm2\sqrt{19}$$

PB＞0 なので，$\mathrm{PB}=2\sqrt{19}$(cm)

P. 84

12＜解答例＞

(1)　$\frac{9}{4}$cm　　(2)　$\frac{9}{2}\mathrm{cm}^3$

(3)　AQ：QP＝4：11

＜考え方・解き方＞

(1)$\triangle ABP \backsim \triangle CBA$より，

$$BP : BA = AB : CB$$
$$BP : 3 = 3 : 4$$
$$BP = \frac{9}{4}(cm)$$

(2)$\triangle ABP = \frac{1}{2} \times BP \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times 3 = \frac{27}{8}(cm^2)$。よって，三角錐 EABP $= \frac{1}{3} \times \triangle ABP \times BE = \frac{1}{3} \times \frac{27}{8} \times 4 = \frac{9}{2}$ (cm^3)。

(3)三角柱 ABC－DEF $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 4 = 24(cm^3)$。三角錐 EABQ $= 24 \times \frac{1}{20} = \frac{6}{5}(cm^3)$。ここで，三角錐 EABQ：三角錐 EABP $= \triangle ABQ : \triangle ABP = AQ : AP = \frac{6}{5} : \frac{9}{2} =$ $4 : 15$。よって，AQ：QP＝4：15－4＝4：11

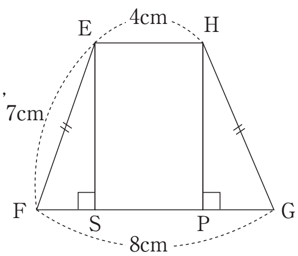
P. 85

13＜解答例＞

(1)　2cm　　(2)　$3\sqrt{5}$cm　　(3)　$4\sqrt{5}cm^2$

(4)　$\frac{10\sqrt{5}}{3}cm^3$

＜考え方・解き方＞



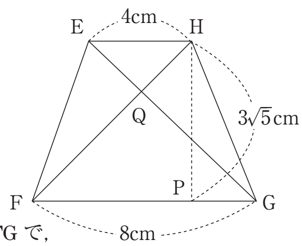
(1)右図において，
AB＝CD＝EF＝HG より，
$\triangle EFS \equiv \triangle HGP$ となるので，SF＝PG。
よって，
PG＝(8－4)÷2＝2(cm)

(2)右上図の$\triangle HPG$で三平方の定理より，

$$HP^2 + PG^2 = HG^2$$
$$HP^2 + 2^2 = 7^2$$

HP＞0より，

$HP = 3\sqrt{5}$となる。

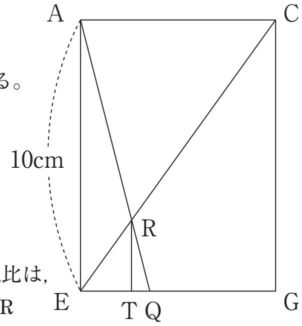


(3)右図において，

$$\triangle EFH = \frac{1}{2} \times EH \times HP$$
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{5}$$
$$= 6\sqrt{5}$$

ここで，$\triangle QHE \backsim \triangle QFG$ で，
相似比は，HE：FG＝4：8＝1：2＝QH：QF。
よって，FH：QF＝QH＋QF：QF＝(1＋2)：2＝3：2 となる。
したがって，

$\triangle EFQ = \frac{2}{3}\triangle EFH = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{5} = 4\sqrt{5}(cm^2)$となる。



(4)右図において
(3)より EQ：QG＝1：2
なので，CA＝3とおける。
$\triangle RAC \backsim \triangle RQE$ で
相似比は，

$$CA : EQ = 3 : 1$$
$$= AR : QR$$

よって，
$\triangle QRT \backsim \triangle QAE$ の相似比は，

$$QR : AQ = QR : AR + QR$$
$$= 1 : 3 + 1$$

＝1：4となるので，

$$RT : AE = 1 : 4$$
$$RT : 10 = 1 : 4$$
$$RT = \frac{5}{2}$$

したがって，求める三角錐 REFQ の体積は，
$\frac{1}{3} \times \triangle EFQ \times RT = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{5} \times \frac{5}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{3}(cm^3)$ となる。

P. 86

14＜解答例＞

(1)　$9\sqrt{3}\pi$ cm^3　　(2)　18π cm^2　　(3)　$\frac{3\sqrt{3}}{2}$cm

(4)　$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ cm^3

＜考え方・解き方＞

(1)**図１**で三平方の定理より，

$$OP^2 + 3^2 = 6^2$$

OP＞0より，

$$OP = 3\sqrt{3}$$

よって，容器 A の容積は，

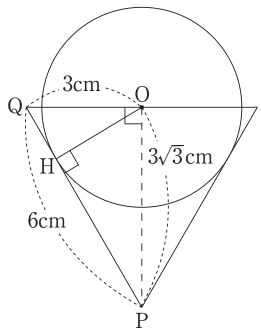
$$\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi\ (cm^3)$$

(2)容器 A の側面のおうぎ形の中心角を a とすると，

$a = 360 \times \frac{2\pi \times 3}{2\pi \times 6} = 180°$ となる。

よって，容器 A の側面積は，

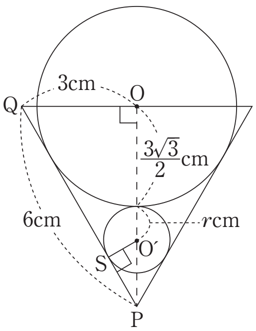
$$\pi \times 6^2 \times \frac{180}{360} = 18\pi\ (cm^2)$$



(3)右図において，
$\triangle OPQ$ の面積より，

$$\frac{1}{2} \times OQ \times OP = \frac{1}{2} \times PQ \times OH$$
$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times OH$$
$$OH = \frac{3\sqrt{3}}{2}(cm)$$

(4)右図において，
球Cの中心をO′とおき，
容器Aと球Cが接している
点をSとして、O′Sを結ぶ。
このとき，$O'S \perp PQ$である。
球Cの半径$O'S=r$とおくと，



$O'P=OP-OO'$

$=3\sqrt{3}-(\frac{3\sqrt{3}}{2}+r)$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}-r$

△OPQ∽△SPO′より，
OQ：O′S＝PQ：O′P

$3:r=6:(\frac{3\sqrt{3}}{2}-r)$

$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，球Cの体積は，

$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ (cm^3)

P. 87

15＜解答例＞

(1)　①$2\sqrt{5}$cm　　②$\frac{1}{4}$倍

(2)　①$\frac{4}{3}$cm　　② BQ：QC ＝1：3

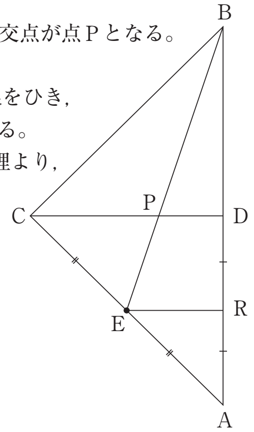
＜考え方・解き方＞

(1)①点Fは，辺CDの中点より，FD＝2cmとなる。
△BCDは∠BDC＝90°の直角二等辺三角形なので，
三平方の定理より，
$BF^2=BD^2+FD^2$
$BF^2=4^2+2^2$
BF＞0より，
$BF=2\sqrt{5}$(cm)

② CF＝DFより，△BCFの面積は，△BCDの面積の$\frac{1}{2}$となる。△ACDで点E，Fはそれぞれ辺AC，CDの中点なので，中点連結定理より，EF∥ADとなり，辺EFは底面BCDに垂直で，EF＝$\frac{1}{2}$ADとなる。よって，三角すいEBCFの体積は，三角すいABCDに比べて，底面積と高さがそれぞれ$\frac{1}{2}$なので，

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$(倍)となる。

(2)①線分BEと辺CDとの交点が点Pとなる。
右図において，
Eから CDに平行な線をひき，
ADとの交点をRとする。
△ACDで中点連結定理より，



$ER=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times4=2$

また，Rは辺ADの
中点より，
DR＝2
△BER∽△BPDより，
PD：ER＝BD：BR
PD：2＝4：6

$PD=\frac{4}{3}$(cm)

②三角すいEABDの体積は，

$\frac{1}{3}\times$△ABD$\times$ER

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times2$

$=\frac{16}{3}$

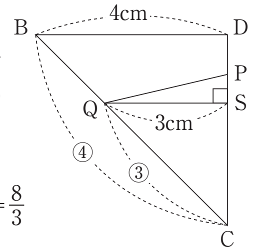
三角すいEQCPの体積は，三角すいEABDの体積の$\frac{1}{2}$なので，

$\frac{1}{3}\times$△QCP$\times$EF$=\frac{16}{3}\times\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\times$△QCP$\times2=\frac{8}{3}$

△QCP＝4

右図でQからCDに下ろした垂線とCDとの交点をSとする。
また，



$CP=CD-PD=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

なので，

△QCP$=\frac{1}{2}\times$CP$\times$QS

$4=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times$QS

QS＝3

よって，△BCD∽△QCSより，
BC：QC＝BD：QS
BC：QC＝4：3
したがって，BQ：QC＝1：3